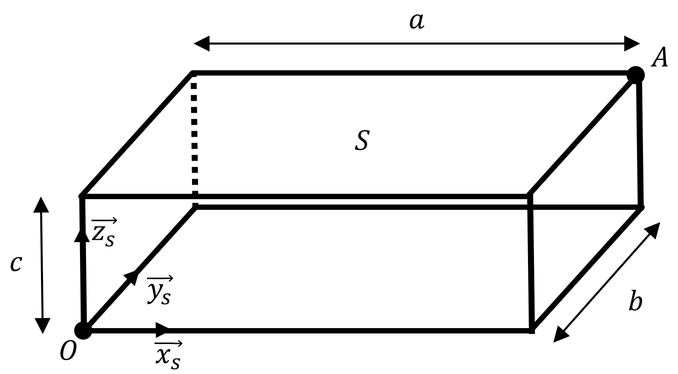
Exercice 1: Matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle



Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du solide S dans le repère $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

G est à l'intersection des 3 plans de symétrie du solide : $G\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Question 2: Déterminer la matrice d'inertie $I(G,S)$ de S en G

$$V = abc \quad ; \quad m = \rho abc \quad ; \quad dV = dxdydz \quad ; \quad Origine\ en\ G$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s} = \cdots = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}$$

La matrice en G est diagonale car on a au moins deux plans de symétrie parmi $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s})$, $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{z_s})$ et $(G, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ (attention, le G est important, le point d'expression de la matrice sous forme simplifiée doit appartenir aux éléments de symétrie). Cela veut dire aussi $\boldsymbol{D = E = F = 0}$

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S y^2 \rho dV + \int_S z^2 \rho dV$$

Attention : les bornes de l'intégrale doivent être centrées sur le point G.

$$A = \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2 dxdydz + \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dxdydz$$

$$A = \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz$$

$$\boldsymbol{A} = \rho \frac{ac}{3} [y^3]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \rho \frac{ab}{3} [z^3]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \frac{ac}{3} \frac{b^3}{4} + \rho \frac{ab}{3} \frac{c^3}{4} = \rho \frac{ab^3c}{12} + \rho \frac{abc^3}{12} = \boldsymbol{\frac{m}{12}(b^2 + c^2)}$$

Par analogie :

$$\boldsymbol{B} = \int_S (x^2 + z^2) dm = \boldsymbol{\frac{m}{12}(a^2 + c^2)} \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \boldsymbol{\frac{m}{12}(a^2 + b^2)}$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}$$

Question 3: Déterminer la matrice d'inertie $I(O,S)$ de S en O en utilisant le théorème de Huygens généralisé

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

$$I(O,S) = I(G,S) + m \begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{4} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s} + \begin{bmatrix} m\frac{b^2+c^2}{4} & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & m\frac{a^2+c^2}{4} & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & m\frac{a^2+b^2}{4} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$\frac{m}{12} + \frac{m}{4} = \frac{4m}{12} = \frac{m}{3}$$

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2+c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(a^2+c^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

Question 4: Déterminer la matrice d'inertie $I(O,S)$ de S en O par la méthode intégrale

On change l'origine du repère d'intégration, en ce point il est nécessaire de calculer tous les termes de la matrice (pas de symétrie passant par O) :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

$$A=\int_S (y^2+z^2)dm=\int_S y^2\rho dV+\int_S z^2\rho dV$$

$$A=\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} y^2 dxdydz+\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} z^2 dxdydz$$

$$A=\rho\int_{x=0}^{a} dx\int_{y=0}^{b} y^2 dy\int_{z=0}^{c} dz+\rho\int_{x=0}^{a} dx\int_{y=0}^{b} dy\int_{z=0}^{c} z^2 dz$$

$$\boldsymbol{A}=\rho\frac{ab^3c}{3}+\rho\frac{abc^3}{3}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{b^2}+\boldsymbol{c^2})$$

Par analogie :

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{a^2}+\boldsymbol{c^2}) \quad ; \quad \boldsymbol{C}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{a^2}+\boldsymbol{b^2})$$

$$D=\int_S yzdm=\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} yzdxdydz=\rho\int_{x=0}^{a} dx\int_{y=0}^{b} ydy\int_{z=0}^{c} zdz$$

$$\boldsymbol{D}=\rho a\frac{b^2}{2}\frac{c^2}{2}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{bc}$$

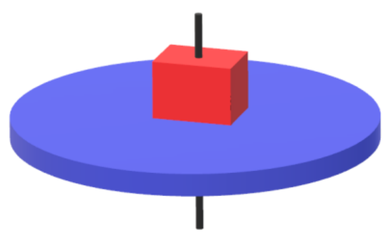
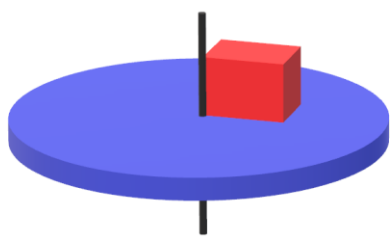
Par analogie : $\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{ac}$; $\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{ab}$

Soit finalement :

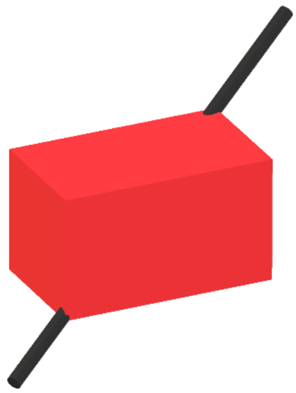
$$I(O,S)=\begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2+c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(a^2+c^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

Question 5: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie J recherchée

$$J=\vec{z}.I(M,S)\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}.\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}.\begin{pmatrix}-E\\-D\\C\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}=C$$

	
$J=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$	$J=\frac{m}{3}(a^2+b^2)$

Question 6: Déterminer le moment d'inertie autour de cet axe



Exprimons le vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans $\mathfrak{B}_s$: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$

Soit le vecteur unitaire associé : $\overrightarrow{OA} = L\vec{u}$ avec $L = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

Penser au fait que G est sur la droite OA :

$$I = \vec{u}.I(G,S)\vec{u} = \vec{u}.I(A,S)\vec{u}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s} . \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

$$I = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s} . \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2)a \\ \frac{m}{12}(a^2+c^2)b \\ \frac{m}{12}(a^2+b^2)c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

$$I = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} . \left(\frac{m}{12}(b^2+c^2)a^2 + \frac{m}{12}(a^2+c^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2+b^2)c^2 \right)$$

$$I = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \frac{m}{12} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)$$

$$\boxed{I = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

Sinon avec la matrice en A ☹ :

$$I=\vec{u}.I(O,S)\vec{u}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}.\begin{bmatrix}\frac{m}{3}(b^2+c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac\\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(a^2+c^2) & -\frac{m}{4}bc\\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2+b^2)\end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

$$I=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}.\begin{pmatrix}\frac{m}{3}(b^2+c^2)a-\frac{m}{4}abb-\frac{m}{4}acc\\ -\frac{m}{4}aba+\frac{m}{3}(a^2+c^2)b-\frac{m}{4}bcc\\ -\frac{m}{4}aca-\frac{m}{4}bcb+\frac{m}{3}(a^2+b^2)c\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

$$I=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{m}{3}(b^2+c^2)a-\frac{m}{4}abb-\frac{m}{4}acc\right)a+\left(-\frac{m}{4}aba+\frac{m}{3}(a^2+c^2)b-\frac{m}{4}bcc\right)b$$
$$+\left(-\frac{m}{4}aca-\frac{m}{4}bcb+\frac{m}{3}(a^2+b^2)c\right)c$$

$$I=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{m}{3}(b^2+c^2)a^2-\frac{m}{4}a^2b^2-\frac{m}{4}a^2c^2\right)+\left(-\frac{m}{4}a^2b^2+\frac{m}{3}(a^2+c^2)b^2-\frac{m}{4}b^2c^2\right)$$
$$+\left(-\frac{m}{4}a^2c^2-\frac{m}{4}b^2c^2+\frac{m}{3}(a^2+b^2)c^2\right)$$

$$I=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\frac{m}{3}(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)-\frac{m}{4}(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)$$

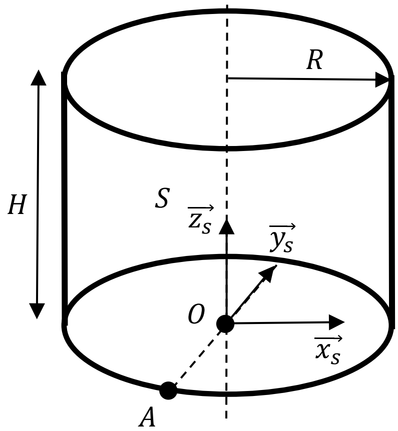
$$I=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)m$$

$$I=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\right)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)m$$

$$I=\frac{m}{6}\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Il y aurait une solution lourde consistant à changer la matrice de base pour que $\vec{u}$ soit l'un des 3 vecteurs de sa base… On prendrait alors le terme diagonal associé à ce vecteur.

Exercice 2: Matrice d'inertie d'un cylindre



Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du solide S dans le repère $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

G est à l'intersection des plans de symétrie verticaux et du plan médian horizontal du solide : $G\left(0,0,\frac{H}{2}\right)$

Question 2: Déterminer la matrice d'inertie $I(G,S)$ de S en G

$$V = \pi R^2 H \quad ; \quad m = \rho \pi R^2 H \quad ; \quad dV = r dr d\theta dz$$

Origine en G

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}$$

On a une symétrie de révolution autour de l'axe $(G, \overrightarrow{z_s})$:

$$\boldsymbol{D = E = F = 0}$$

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 dm = \rho \int_S r^2 dV = \rho \int_{r=0}^{R} r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz$$

$$\boldsymbol{C} = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi H = \rho \pi H R^2 \frac{R^2}{2} = \boldsymbol{m \frac{R^2}{2}}$$

$$\int_S z^2 dm = \rho \int_{r=0}^{R} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz = \rho 2\pi \frac{R^2}{2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \rho\pi \frac{R^2}{3} \frac{2H^3}{8} = \rho \pi R^2 H \frac{H^2}{12} = m \frac{H^2}{12}$$

$$\boldsymbol{A = B} = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm = \boldsymbol{m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right)}$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}$$

Question 3: Donner la forme de la matrice $\boldsymbol{I(A,S)}$

Plan de symétrie $(A,\vec{y},\vec{z})$, donc :

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

Question 4: Déterminer la matrice d'inertie $\boldsymbol{I(A,S)}$ de $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{A}$ en utilisant le théorème de Huygens généralisé

$$\overrightarrow{GA}=\begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ -\dfrac{H}{2} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_s} \quad ; \quad I(A,S)=I(G,S)+m\begin{bmatrix} R^2+\dfrac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{H^2}{4} & -\dfrac{RH}{2} \\ 0 & -\dfrac{RH}{2} & R^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\dfrac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}+m\begin{bmatrix} R^2+\dfrac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{H^2}{4} & -\dfrac{RH}{2} \\ 0 & -\dfrac{RH}{2} & R^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}+R^2+\dfrac{H^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}+\dfrac{H^2}{4}\right) & -m\dfrac{RH}{2} \\ 0 & -m\dfrac{RH}{2} & m\left(\dfrac{R^2}{2}+R^2\right) \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} m\left(\dfrac{5}{4}R^2+\dfrac{H^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{3}\right) & -m\dfrac{RH}{2} \\ 0 & -m\dfrac{RH}{2} & m\dfrac{3}{2}R^2 \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

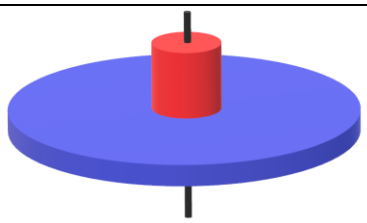
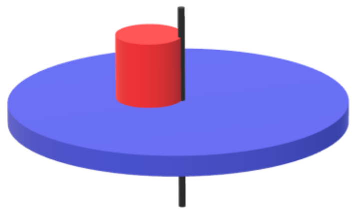
Question 5: Que pensez-vous de la méthode de calcul intégral pour déterminer $I(A,S)$

Le calcul de $I(A,S)$ par méthode intégrale va nécessiter de placer le centre du repère en A, ce qui rend les bornes complexes…

$$\int_S dm = \rho \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{f(\theta)} r dr\, d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \quad ; \quad f(\theta) = ???$$

$$\int_S dm = \rho \int_{x=0}^{2R} \int_{y=0-f(x)}^{f(x)} y dy\, d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \quad ; \quad f(x) = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}$$

Question 6: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie J recherchée

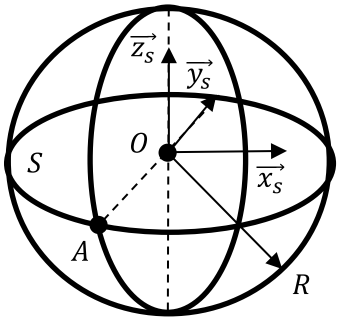
	
$J = m\frac{R^2}{2}$	$J = m\frac{3}{2}R^2$

Question 7: Donner finalement la matrice d'inertie $I(G,S)$ d'un cylindre S de CDG G de révolution d'axe (G,x)

Il suffit d'adapter la diagonale :

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} m\frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_S}$$

Exercice 3: Matrice d'inertie d'une sphère



Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du solide S dans le repère $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

G est à l'intersection d'une infinité de plans de symétrie passant par O : $G = 0(0,0,0)$

Question 2: Déterminer la matrice d'inertie $I(G,S)$ de S en G

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad ; \quad m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \quad ; \quad dV = r^2 \sin\psi \, dr d\theta d\psi$$

Origine en G

$$x = r\sin\psi\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\psi\sin\theta \quad ; \quad z = r\cos\psi$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}$$

On a une symétrie sphérique autour du point G :

$$\boldsymbol{D = E = F = 0}$$

$$A = B = C = \frac{2}{3}I_G = \frac{2}{3}\int_S (x^2+y^2+z^2)dm = \frac{2}{3}\int_S r^2 dm$$

$$I_G = \int_S r^2 dm = \rho\int_{r=0}^{R} r^4 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} d\psi = \rho\int_S r^4 \sin\psi \, dr d\theta d\psi$$

$$I_G = \rho\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I_G = \rho\frac{R^5}{5}[-\cos\psi]_0^\pi 2\pi = \rho\frac{4}{5}\pi R^5 = \frac{3}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 R^2 = \frac{3}{5}mR^2$$

$$\boldsymbol{A = B = C} = \frac{2}{3}I_G = \frac{2}{3}\frac{3}{5}mR^2 = \boldsymbol{\frac{2}{5}mR^2}$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s}$$

Mauvaise méthode :

$$A = B = C = \int_S (x^2+y^2)dm = \int_S r^2 \sin^2\psi \, dm = \rho \int_S r^2 \sin^2\psi \, r^2 \sin\psi \, drd\theta d\varphi$$

$$= \rho \int_S r^4 \sin^3\psi \, drd\theta d\psi = \rho \int_{r=0}^{R} r^4 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} \sin^3\psi \, d\psi = \rho 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi} \sin^3\psi \, d\psi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\psi \, d\psi = \int_0^{\pi} \sin\psi \sin^2\psi \, d\psi = \int_0^{\pi} \sin\psi \, (1-\cos^2\psi) d\psi$$

$$u = \cos\psi \; ; \; du = -\sin\psi \, d\psi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\psi \, d\psi = -\int_1^{-1} (1-u^2)du = \int_1^{-1} (u^2-1)du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A = B = C = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 2 \frac{R^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2$$

Question 3: Déterminer la matrice d'inertie $I(A,S)$ de S en A en utilisant le théorème de Huygens généralisé

$$\overrightarrow{GA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_s} \quad ; \quad I(O,S) = I(G,S) + m \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

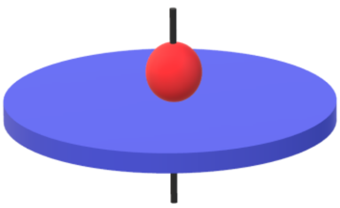
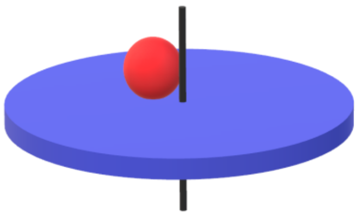
$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s} + m \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

Question 4: Que pensez-vous de la méthode de calcul intégral pour déterminer $I(A,S)$

Le calcul de $I(A,S)$ par méthode intégrale va nécessiter de placer le centre du repère en A, ce qui rend les bornes complexes…

Question 5: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie J recherchée

	
$J = \frac{2}{5}mR^2$	$J = \frac{7}{5}mR^2$

Exercice 4: Questions de concours

Question 1: X-ENS PSI 2018 – Questions 23-24

Question 23 :

On a un seul plan de symétrie, celui de la coupe de la figure, soit $(O,\vec{x},\vec{z})$, donc :

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s}$$

Question 24 :

Si on néglige l'excentricité R_{orb}, on a un nouveau plan de symétrie $(O,\vec{y},\vec{z})$, la matrice est diagonale.

Question 2: E3A PSI 2017- Question I4

Dans l'ordre :

- Plans de symétrie $(A,\vec{x},\vec{y})$ et $(A,\vec{y},\vec{z})$ donc matrice diagonale. Les termes hors diagonaux sont donc nuls
- Symétrie de révolution autour de $(A,\vec{z})$ donc « $A=B$ »
- Dans toute base contenant $\vec{z}$, mais la question est mal posée, car il faut que la matrice soit exprimée en un point de l'axe de révolution

Attention : ne pas utiliser le mot « rotation », mais bien « révolution ».